物性物理科学 I

注意：問題１から 3 までの各問いに解答し，各問題の答えを別々の解答用紙に記入すること．１つの問題の解答が解答用紙２枚にわたるときには，２枚目にも問題の番号を書き，２枚目であることを明示すること．

問題１

図１に示すように，一辺の長さが $2a$ の正方形の断面をもつ，長さ $2b$ の直方体である剛体を考える．この剛体は一様な密度 ρ を持ち，質量は $M = 8\rho a^2 b$ である．いまこの剛体に固定された座標軸 ξ，η，ζ を図１のようにとる．ただし，座標軸 ξ，η，ζ の原点は剛体の重心位置 G とする．また，図１に示すように ξ 軸上の剛体表面の点を点P，点Qとする．

この剛体が，図２に示すように，重さが無視でき，たわみ，伸縮が無い２本の糸で水平な天井の点A，点Bから吊り下げられているとする．このとき，鉛直下向きの重力加速度を g とする．また点Aから点Bへの距離を $2c$ とする．ただし $c > b$ である．それぞれの糸の長さは l であり，それぞれの糸の両端を図２に示すように点A，点P，および，点B，点Qに固定している．ここで空間に固定した座標軸 x，y，z を図２のようにとる．ただし，平衡位置では座標軸 ξ，η，ζ が座標軸 x，y，z とそれぞれ重なっているとする．

ここで図３に示すように，この剛体が ζ 軸まわりに微小振動している場合を考える．ただし，ξ 軸，η 軸まわりの回転は考えないものとする．また，この剛体は 点P，点Q以外では糸や天井とは触れないものとする．図 3 上面図に示すxy平面上に投影した線分ABと線分PQがなす角度を θ し，xyz座標系でみた剛体の重心Gの位置座標を $(0, 0, Z)$ とする．このとき，以下の問いに答えよ．また，導出過程も記載すること．

[1] この剛体のξ軸，η軸，ζ軸回りの主慣性モーメント I_ξ，I_η，I_ζ を M，a，b のうち必要なものを用いてそれぞれ表せ．

[2] θ と Z を，運動を記述する座標として，系の運動エネルギー T，ポテンシャルエネルギー U，ラグランジアン L を M，g，Z，$\dot{Z}$，θ，$\dot{\theta}$，I_ζのうち必要なものを用いてそれぞれ表せ．ただし，$\dot{Z}$，$\dot{\theta}$ はそれぞれ Z，θの１階の時間微分である．

（次ページにつづく）

問題１のつづき

[3] 設問[2]で求めたラグランジアン L から Z と $\dot{Z}$ を消去し，θのみを運動を記述する座標として，ラグランジアン L を M，g，b，c，h，θ，$\dot{\theta}$，I_ζ を用いて表せ．ただし，$h=\sqrt{l^2-(c-b)^2}$ とする．また，$\cos\theta \sim 1-\frac{\theta^2}{2}$，$Z^2-2Zh \sim -2Zh$ として良い．またθ，$\dot{\theta}$ は微少量として、3 次以上の項は無視せよ．（ヒント：点Qは点Bを中心とする半径 l の球面上に存在する．）

[4] 設問[3]で求めたラグランジアンを用い，θ に関するラグランジュ方程式を書け．

[5] 設問[4]で求めたラグランジュ方程式を用いて，剛体の微小振動の周期を求めよ．

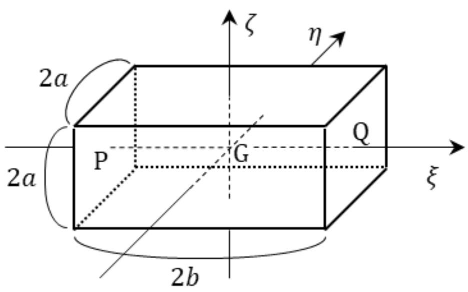

図1

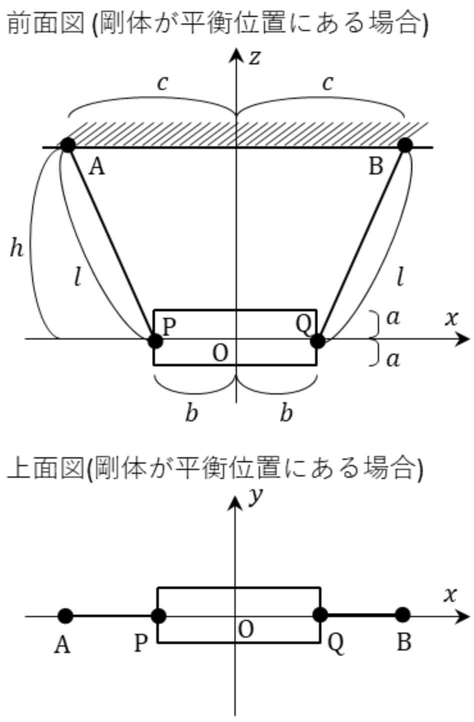

図2

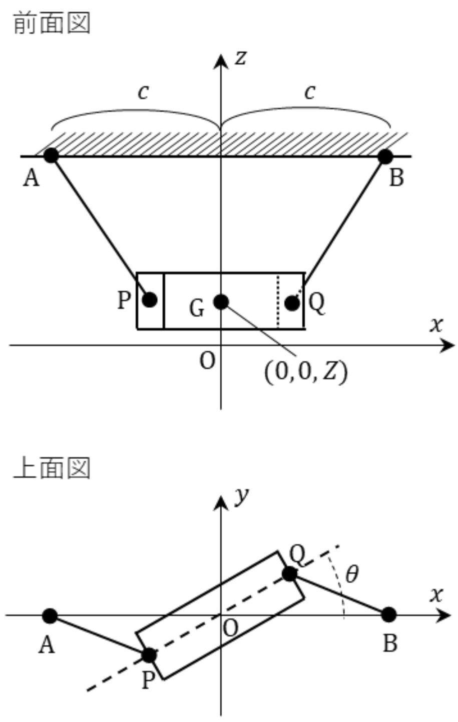

図3

問題２

図４のような，円形の断面をもつドーナツ状鉄心に太さが無視できる１本の導線を巻き付けたトロイダルコイルを考える. なお, 鉄心の円形断面の中心とドーナツ状鉄心の中心の距離を a とし，円形断面の半径を b とする．また，導線には一定電流 I が流れているとする．導線は場所に依らず一様かつ密に巻かれているものとし，その総巻数を N とする．また，ドーナツ状鉄心及び真空の透磁率をそれぞれμ，μ_0 とする．以下の問いに答えよ.

[1] 鉄心の円形断面内の点 P の座標を図４のような極座標$(r,\ \theta)$で表すこととする。円形断面内$(r \leq b)$の円形断面に垂直な方向に発生する磁場 H を a，N，I，r，θ を用いて表せ．なお，ドーナツ状鉄心の中心軸と P 点を結ぶ半径 R を持つ円周 C 上では H はどこでも等しく，アンペールの法則が適用できることを用いて良い.

[2] 鉄心の円形断面を横切る全磁束Φを μ，a，b，N，I を用いて表せ．また，鉄心の円形断面内$(r \leq b)$の円形断面に垂直な方向の磁束密度を B とすると，$B = \mu H$ の関係にあることに注意せよ．ただし，以下の積分公式を用いてよい.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{D + E\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{D^2 - E^2}} \qquad (\text{ただし、} D > E > 0)$$

[3] このトロイダルコイルの自己インダクタンス L をμ，a，b，N，I の中から必要なものを用いて表せ.

[4] $a \gg b$ であるとき，設問[2]で定義した B を μ，a，N，I を用いて表せ．b/a の４次以上の項は無視せよ．ただし，鉄心の円形断面内で B は一様であるとする.

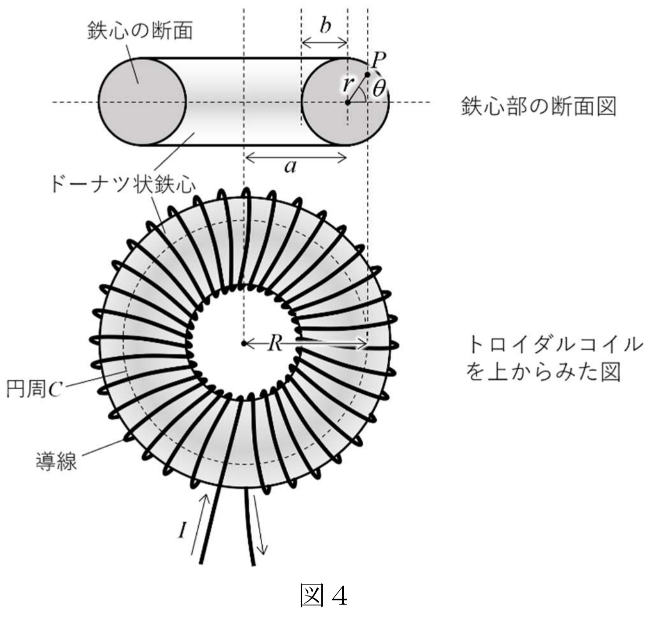

図４

（次ページにつづく）

問題２のつづき

図４のトロイダルコイルを改造し，図５のように鉄心の一部に長さδの空隙($2\pi a \gg \delta$)を設ける．ただし，図４のトロイダルコイルと巻数 N は同じであり，導線には電流 I が流れているとする．空隙部には導線は存在せず，空隙部に現れた鉄心の断面の面積はπb^2であるとする．以下では $a \gg b$ とし，鉄心の内部と空隙部それぞれの領域で磁束密度は一様かつ連続であるとしてよいものとする（その磁束密度を B_1 と定義する）．また，鉄心の内部と空隙部の外に磁束の漏れはないものとして，次の問いに答えよ．

[5] B_1 をμ，μ_0，a，N，I，δを用いて表せ．

[6] このコイルの自己インダクタンスL_1を μ, μ_0, a, b, N, I, δの中から必要なものを用いて表せ．

[7] 鉄心内部の磁化Mを μ，μ_0，a，N，I，δ を用いて表せ．ただし， 磁化は鉄心の円形断面に垂直な方向に発生する磁場H_1に沿って生じるものとする．また，設問[5]で定義したB_1は，$B_1 = \mu_0(H_1 + M)$であることに注意せよ．

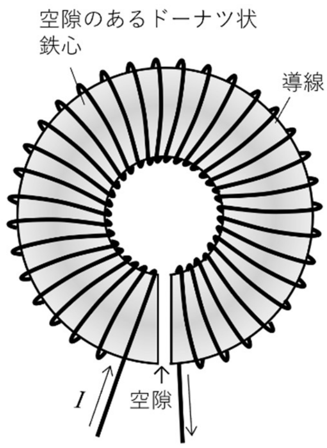

図５

問題３

次のハミルトニアンで表されるα, βの二つの独立な一次元調和振動子を量子力学に基づいて考える．

$$H = H_\alpha + H_\beta = \sum_{k=\alpha,\beta} \left(\frac{1}{2m} \hat{p}_k^2 + \frac{m\omega^2}{2} \hat{q}_k^2 \right) \qquad (1)$$

ただし，$H_k = \frac{1}{2m}\hat{p}_k^2 + \frac{m\omega^2}{2}\hat{q}_k^2$ は振動子$k\ (= \alpha, \beta)$のハミルトニアン，　mは振動子を形成する粒子の質量，ωは調和振動子の角振動数，$\hat{p}_k$，$\hat{q}_k$はそれぞれ運動量演算子と座標演算子であり，これらの演算子は $[\hat{q}_k, \hat{p}_l] = i\hbar\delta_{kl}$なる交換関係を満たす．また，$\delta_{kl}$はクロネッカのデルタ $(l = \alpha, \beta)$，i は虚数単位 $(i^2 = -1)$，$\hbar$はプランク定数を ２πで割った定数である．ここで次の関係を満たす演算子$a_k^\dagger$，a_kを定義する．

$$\hat{q}_k = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(a_k^\dagger + a_k\right),\ \hat{p}_k = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(a_k^\dagger - a_k\right)$$

以下の設問に答えよ．

[1] $a_k^\dagger$，a_kの交換関係$\left[a_k, a_k^\dagger\right]$を求めよ．

[2] 式(1) のハミルトニアンを$a_k^\dagger$，a_kで表現せよ．

[3] それぞれの調和振動子の規格化された基底状態を$\varphi_k^{(0)}$，その固有値を$E_k^{(0)}$とする．すなわち$H_k\varphi_k^{(0)} = E_k^{(0)}\varphi_k^{(0)}$である．$a_k^\dagger$，$a_k$の交換関係から$a_k\varphi_k^{(0)} = 0$，及び$E_k^{(0)} = \frac{\hbar\omega}{2}$であることを示せ．（ヒント，$\varphi_k{}' = a_k\varphi_k^{(0)}$としたとき，$H_k\varphi_k{}' = \left(E_k^{(0)} - \hbar\omega\right)\varphi_k{}'$であることを示せ．）また，$\varphi_k{}' = a_k{}^\dagger\varphi_k^{(0)}$であるとき，$H_k\varphi_k{}' = \left(E_k^{(0)} + \hbar\omega\right)\varphi_k{}'$であることを示せ．

さて, それぞれの調和振動子において固有値が $\frac{\hbar\omega}{2}$ である状態, すなわち基底状態を $\varphi_k^{(0)} = |0\rangle_k$ と表す．これはエネルギー量子の数が0個の状態である．また，固有値が $\frac{\hbar\omega}{2} + n\hbar\omega$ である状態, すなわちエネルギー量子の数が n 個の状態を$\varphi_k^{(n)} = |n\rangle_k$とする．ただし、$n$は0以上の整数である．これらは規格直交化されており，${}_k\langle n'|n\rangle_l = \delta_{n'n}\delta_{kl}$の関係を満たす．

（次ページにつづく）

問題３のつづき

さらに設問[3]の結果から，$a_k|0\rangle_k = 0$, $a_k|1\rangle_k = |0\rangle_k$, $a_k^\dagger|0\rangle_k = |1\rangle_k$であることが分かる．また，振動子 α のエネルギー量子の数がn，振動子 β のエネルギー量子の数がn'の場合，相互作用がなければ全系の状態は$|n\rangle_\alpha|n'\rangle_\beta$と書ける．以上の記法を使って以下の問に答えよ．

［4］ α, βの二つの振動子の間に相互作用がある場合を考える．すなわち，ハミルトニアンが

$$H = H_\alpha + H_\beta + g\left(a_\alpha^\dagger a_\beta + a_\beta^\dagger a_\alpha\right)$$

と書けるとする．ここでgは実定数で，$0 < g \ll \hbar\omega$ を満たす．この場合の全系の固有状態，固有値のうち，二つの調和振動子のエネルギー量子の数の和が 1 になるものを求めよ．なお，固有状態は規格化した形で書け．

［5］ 設問[4]において，全系の初期状態が$|0\rangle_\alpha|0\rangle_\beta$にあるときに外場による摂動$\sum_k\left(a_k^\dagger + a_k\right)F\cos(\omega_r t)$が働くと，この初期状態から全系のエネルギー量子の数の和が１の状態への遷移が起こる．ただし，ω_r は外場の角振動数，F は $g \gg F > 0$ を満たす定数，tは時間である．このとき，設問[4]で求めたどの状態への遷移が起こるかを調べ，その答えを記せ．